

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO A GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' + y' - 12y = 0$, $y'' - 6y' + 10y = 0$, $y'' - 14y' + 49y = 0$.
2. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

a) $y' = \frac{y}{\cos x} + \sin x$, b) $x^3 y' = e^{2x}$, c) $2y - (y')^4 = 3x$, d) $y' - x \sin y = 0$, e) $2x^2 - 5y' = 3y$

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - 6x^2 y = 3e^{2x^3}$.
3. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$, $1 \leq r \leq 4$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
4. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 3y$ i D zadano s $2 \leq x \leq 5$, $1 \leq y \leq 6$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).
5. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' = 4y$, $y(\ln 2) = 64$ i objasnite rješenje.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO B GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{11\pi}{6}$, $2 \leq r \leq 6$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
2. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' - 4y' + 29y = 0$, $y'' - 12y' + 36y = 0$, $y'' - 3y' - 10y = 0$.
3. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' = 6y$, $y(\ln 2) = 32$ i objasnite rješenje.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

4. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!
a) $3x^2 - 4y' = 2y$, b) $3y - (y')^2 = 2x$, c) $y' - x \tan y = 0$, d) $x^4 y' = e^{3x}$, e) $y' = \frac{y}{\sin x} + \tan x$
(iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - 3x^2 y = 2e^{x^3}$.
5. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 4y$ i D zadano s $1 \leq x \leq 4$, $3 \leq y \leq 6$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO C GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

a) $4y - (y')^3 = 5x$, b) $y' - x \cos y = 0$, c) $x^2 y' = e^{7x}$, d) $y' = \frac{y}{\tan x} + \sin x$, e) $6x^2 - 3y' = 5y$

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' - 9x^2 y = 5e^{3x^3}$.
2. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 2y$ i D zadano s $3 \leq x \leq 7$, $2 \leq y \leq 5$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).
3. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y'' - 4y' - 12y = 0$, $y'' - 6y' + 18y = 0$.
4. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' = 2y$, $y(\ln 2) = 100$ i objasnite rješenje.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

5. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{5\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}$, $3 \leq r \leq 8$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, A GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx$.
(2 boda)

(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

2. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y^2 + Cx = -x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(-2, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)

3. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{y+x}{x}$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$
(1 bod)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $x \frac{dy}{dx} = -x^2 - y$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet
 $y(2) = 3$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, A GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx$.
(2 boda)

(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

2. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y^2 + Cx = -x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(-2, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)

3. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = \frac{y+x}{x}$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$
(1 bod)

5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $x \frac{dy}{dx} = -x^2 - y$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet
 $y(2) = 3$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, B GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađbe $x \frac{dy}{dx} = -x^2 - 2y$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)
2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađbe $y' = \frac{y+2x}{x}$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$ (1 bod)
3. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednađbu:

$$y^2 - Cx = -x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(2, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)

4. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} dx$. (2 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
5. Odredite opće rješenje diferencijalne jednađbe:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, B GRUPA 31. svibnja 2010.

1. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađbe $x \frac{dy}{dx} = -x^2 - 2y$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)
2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađbe $y' = \frac{y+2x}{x}$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$ (1 bod)
3. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednađbu:

$$y^2 - Cx = -x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(2, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)

4. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{3-y} dx$. (2 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
5. Odredite opće rješenje diferencijalne jednađbe:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, C GRUPA 31. svibnja 2010.

1. Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

2. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} dx$.
(2 boda)

(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' = \frac{y-x}{x}$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$
(1 bod)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $x \frac{dy}{dx} = x^2 - y$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(2) = 0$. (1 bod)

5. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednačbu:

$$-y^2 + Cx = x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(-1, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO, C GRUPA 31. svibnja 2010.

1. Odredite opće rješenje diferencijalne jednačbe:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x}. \quad (4 \text{ boda})$$

2. (i) Promjenom poretka integracije riješite integral $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2-y} dx$.
(2 boda)

(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)

3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' = \frac{y-x}{x}$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$
(1 bod)

4. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $x \frac{dy}{dx} = x^2 - y$. (2 boda)

(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(2) = 0$. (1 bod)

5. i) Za danu familiju krivulja nađite pripadnu diferencijalnu jednačbu:

$$-y^2 + Cx = x^2. \quad (1 \text{ bod})$$

ii) Nađite krivulju iz i) koja prolazi točkom $(-1, 0)$ i skicirajte je. (1 bod)